UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

UECE 2022.2

1ª Fase

Professor

Carlos Alex

Professor Alex Mat

Comentário sobre a prova
de Matemática UECE 2022.2

Professor Carlos Alex

13. (UECE 2022.2) O professor Abder comprou alguns exemplares de um livro para presentear seus alunos, gastando R$ 640,00. Ganhou quatro livros de bonificação e, com isso, o preço de cada livro ficou R$ 8,00 mais barato. Assim, é correto afirmar que o número de livros que o professor destinou para presentear seus alunos é

A) 20.

B) 12.

C) 18.

D) 14.

Resolução - Alternativa A – Sistemas Lineares

Chamando p = preço e q = quantidade de livros, temos as seguintes equações:

$$\begin{cases} p \cdot q = 640 \\ (p-8)\cdot(q+4) = 640 \end{cases}$$

Desenvolvendo a segunda equação temos:

$$(p-8)\cdot(q+4) = 640$$
$$p\cdot q - 8q + 4p - 32 = 640$$
$$640 - 8q + 4p - 32 = 640$$
$$4p - 8q = 32 \ (Dividindo\,tudo\ por\ 2)$$
$$p - 2q = 32$$
$$p = 32 - 2q$$

Substituindo na primeira equação, ficamos:

$$p\cdot q = 640$$
$$(8+2q)\cdot q = 640$$
$$8q + 2q^2 = 640 (Dividindo\,tudo\ por\ 2)$$
$$q^2 + 4q - 320 = 0$$
$$q_1 = 16 \qquad q_2 = -20 (não\,convém)$$

Como o professor ganhou 4 livros, ele ficou com 16 + 4 = 20 livros.

Alternativa A

14. (UECE 2022.2) Se a e b são números reais positivos, $a \neq 1$, $b \neq 1$ e se $4 \cdot \log_u b + 2 \cdot \log_v b^2 = 18$, onde $u = a^{2/3}$ e $v = a^2$, então, o valor de $\log_a b$ é igual a

A) $\frac{9}{4}$.

B) $\frac{3}{6}$

C) $\frac{7}{4}$.

D) $\frac{7}{6}$.

<u>Resolução - Alternativa A – Logaritmo</u>

Sendo $u = a^{2/3}$ e $v = a^2$, substituindo na equação, encontraremos $\log_a b$:

$$
\begin{aligned}
&4 \cdot \log_u b + 2 \cdot \log_v b^2 = 18 \\
&4 \cdot \log_{a^{2/3}} b + 2 \cdot \log_{a^2} b^2 = 18 \\
&4 \cdot \frac{1}{2/3} \cdot \log_a b + 2 \cdot \frac{2}{2} \cdot \log_a b = 18 \\
&4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \log_a b + 2 \cdot \log_a b = 18 \\
&6 \cdot \log_a b + 2 \cdot \log_a b = 18 \\
&8 \cdot \log_a b = 18 \\
&\log_a b = \frac{18}{8} \\
&\log_a b = \frac{9}{4}
\end{aligned}
$$

Alternativa A

15. (UECE 2022.2) Situadas em um plano, três circunferências, cujas medidas do raio de cada uma delas é 3 cm, tangenciam-se mutuamente externamente. Assim, pode-se afirmar corretamente que a medida, em cm², da área do triângulo cujos vértices são os centros das circunferências é igual a

A) 7√3.

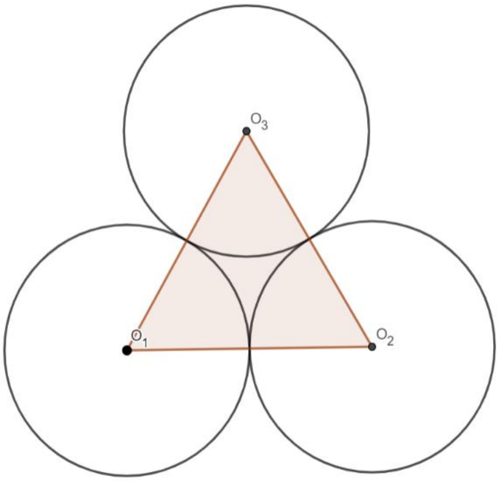
B) 6√3.

C) 9√3

D) 8√3

Resolução - Alternativa C – Geometria Plana – Circunferência e Áreas

Como a intercessão de dois círculos tangentes está na reta que liga seus centros, os comprimentos dos lados dos triângulos são iguais as somas dos raios que às compõem.



Logo, o triângulo formado pelos três centros tem todos os seus lados com comprimento igual à 3cm +3cm = 6cm, e portanto é equilátero.

Usando a fórmula da área do triângulo equilátero, obtemos

$$S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

Alternativa C

16. (UECE 2022.2) Uma folha de papel plana e retangular é dividida em três partes retangulares e congruentes de duas maneiras distintas, referenciadas à largura e ao comprimento da folha de papel. Na primeira, a medida do menor lado de cada parte é igual a 4 cm e, analogamente, na segunda, a medida do menor lado de cada parte é igual a 5 cm. Nessas condições, a medida, em cm, da diagonal da folha de papel é igual a

A) $4\sqrt{41}$.

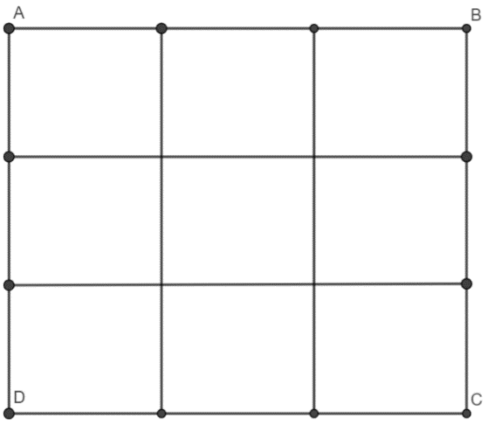
B) $3\sqrt{41}$.

C) $6\sqrt{39}$.

D) $5\sqrt{39}$.

Resolução - Alternativa B – Geometria Plana – Pitágoras

Note que os lados do retângulo têm comprimentos iguais à 4.3 = 12cm e 5.3 = 15cm.



Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos que

$$AC^2 = 12^2 + 15^2 = 369$$
$$AC = \sqrt{369} = 3\sqrt{41}$$

Alternativa B

17. (UECE 2022.2) Desenhados em um plano munido do sistema usual de coordenadas cartesianas, os gráficos das funções reais de variável real f, g e h, que são definidas por $f(x)=2x$ $g(x)=x^2$ e $h(x)=2^x$, possuem exatamente um ponto P em comum. A soma dos quadrados das coordenadas de P é um número múltiplo de

A) 6.

B) 5.

C) 3.

D) 8.

<u>Resolução - Alternativa B – Função</u>

Para encontrarmos o ponto P em comum, só precisamos igualar as funções duas a duas assim:

$$
\begin{aligned}
&f(x)=g(x)\\
&2x=x^2\\
&x^2-2x=0\\
&x\cdot(x-2)=0\\
&x_1=0 \ \ e \ \ x-2=0\\
&\qquad\qquad\quad x_2=2
\end{aligned}
$$

Perceba que igualando as outras funções o x só poderá ser 2 ou 0, portanto:

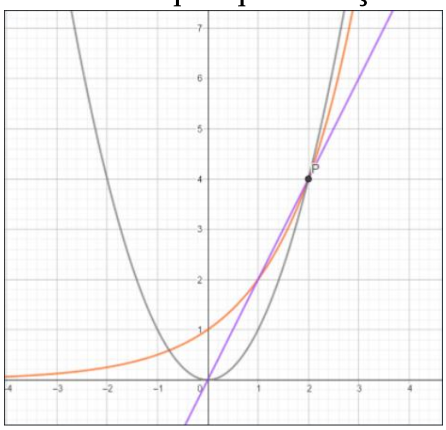
$$
\begin{aligned}
&g(x)=h(x)\\
&x^2=2^x\\
&x=0 \ fica \ \ 0^2=2^0 \rightarrow 0\neq 1(não\,convém)\\
&x=2 \ fica \ \ 2^2=2^2 \rightarrow 4=4
\end{aligned}
$$

Portanto x=2, para encontrar o y do ponto P, podemos substituir em qualquer função:

$f(x)=2x$

$y=2\cdot 2=4$

O ponto P fica $P(2,4)$



A soma dos quadrados das coordenadas de P fica

$2^2+4^2=4+16=20$, que é um múltiplo de 5.

Alternativa B

18. (UECE 2022.2) Em uma loja de confecções, um cliente, depois de verificar as ofertas, resolveu comprar três camisas de modelos e preços diferentes: a primeira foi a mais cara, o preço da segunda foi a metade do preço da primeira e o preço da terceira foi um terço do preço da primeira, totalizando a compra em p reais. O vendedor que o acompanhava apresentou, então, uma oferta promocional. Ao comprar duas unidades de cada peça escolhida anteriormente, teria os seguintes descontos: 10% em cada peça de valor mais alto, 20% em cada peça de valor intermediário e 40% em cada peça de menor valor, totalizando a compra em P reais. A diferença P – p representa um acréscimo de k% sobre o valor p. O Valor de k é aproximadamente

A) 58,4%.

B) 63,6%.

C) 68,6%.

D) 73,4%.

<u>Resolução - Alternativa B – Porcentagem</u>

Pelo enunciado, podemos organizar os preços

1ª loja – x 2ª loja - x/2 3ª loja - x/3

1º Caso)
$$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=p$$
$$\frac{6x+3x+2x}{6}=p$$
$$\frac{11x}{6}=p$$

2° Caso)
$$0,90\cdot 2x+0,80\cdot 2\frac{x}{2}+0,60\cdot\frac{2x}{3}=P$$
$$1,8x+0,8x+0,4x=P$$
$$3x=P$$

Calculando $P-p=3x-\frac{11x}{6}=\frac{7x}{6}$

Portanto

$$k\%\,de\;p=P-p$$
$$k\%\cdot\frac{11x}{6}=\frac{7x}{6}$$
$$k\%\cdot 11=7$$
$$k\%=\frac{7}{11}\simeq 0,636\simeq 63,6\%$$

Alternativa B

19. (UECE 2022.2) Um triângulo retângulo, ao girar em torno de um dos catetos, gera um cone. Ao girar em torno da hipotenusa, gera dois cones ligados pela base, que é a mesma para ambos os cones. Se a medida da hipotenusa do triângulo é 5 cm e a medida de um dos catetos é 3 cm, esse triângulo, ao girar em torno da hipotenusa, gera um sólido (união de dois cones) cuja medida do volume, em cm^3, é

A) $\frac{14\pi}{3}$.

B) $\frac{24\pi}{5}$.

C) $\frac{48\pi}{3}$.

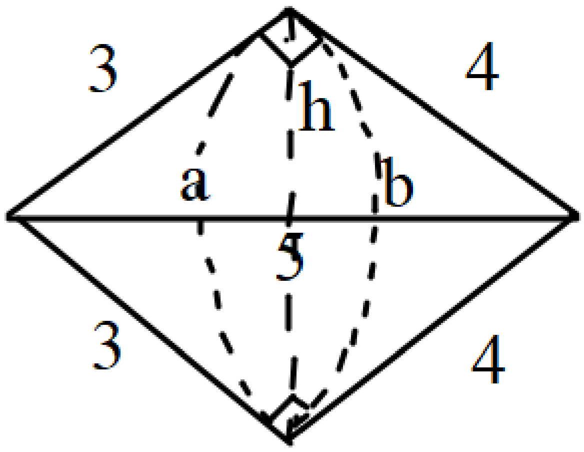
D) $\frac{48\pi}{5}$.

<u>Resolução - Alternativa D – Geometria Espacial – Sólido de revolução</u>

Encontrando o outro cateto, usaremos o teorema de Pitágoras:

(I)
$$\begin{aligned} 5^2 &= 3^2 + y^2 \\ 25 &= 9 + y^2 \\ 16 &= y^2 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Portanto a figura fica da seguinte forma:



Encontrando h que é o raio da circunferência pode usar a relação métrica no triângulo retângulo $cateto \cdot cateto = hipotenusa \cdot altura$

$$3 \cdot 4 = 5 \cdot h$$

$$h = \frac{12}{5}$$

Encontrando o volume, temos: (volume do cone = AB (área da base x altura / 3)

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot b}{3} + \frac{\pi \cdot r^2 \cdot a}{3}$$

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 (a+b)}{3} = \frac{\pi \cdot r^2 (a+b)}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{12}{5}\right)^2 \cdot 5$$

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{144}{25} \cdot 5$$

$$V = \frac{48\pi}{5}$$

Alternativa D

20. (UECE 2022.2) Se p é a quantidade de números inteiros positivos formados por três algarismos pares e distintos, e q é a quantidade de números inteiros positivos formados por três algarismos ímpares e distintos, então, o valor do módulo de p – q é

A) 28.

B) 0.

C) 12.

D) 5.

<u>Resolução - Alternativa C – Análise Combinatória (Princípio Multiplicativo)</u>

(I) p = é a quantidade de números inteiros positivos formados por três algarismos pares e distintos

Algarismos pares (0,2,4,6,8)

Terminando com 0

$$\underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{0}$$

$$4\cdot 3\cdot 1=12$$

Terminando com (2,4,6,8)

$$\underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }$$

$$3\cdot 3\cdot 4=36$$

Portanto $p=12+36=48$

(II) q = é a quantidade de números inteiros positivos formados por três algarismos ímpares e distintos

Algarismos ímpares (1,3,5,7,9)

$$\underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }$$

$$5\cdot 4\cdot 3=60$$

(III) O módulo de p – q é

$$|p-q|=|48-60|=|-12|=12$$

Alternativa C

21. (UECE 2022.2) Em um plano munido do sistema usual de coordenadas cartesianas, identifica–se o par ordenado (x, y) com o número complexo z = x + iy, onde i é o número complexo tal que $i^2 = -1$. Se x e y são números reais quaisquer, o conjunto de números complexos z = x + iy, com $|Z|^2 = (x + iy).(x - iy) = 1$, é representado por

A) quatro retas paralelas aos eixos coordenados.

B) duas retas que passam pela origem do sistema de coordenadas.

C) um quadrado centrado na origem do sistema.

D) uma circunferência centrada na origem do sistema.

<u>Resolução - Alternativa D – Números Complexos e Geometria Analítica – Circunferência</u>

Usando a equação dada:

$$(x + iy).(x - iy) = 1$$

$$x^2 - ixy + ixy - (iy)^2 = 1$$

$$x^2 - i^2y^2 = 1$$

Sendo $i^2 = -1$

$$x^2 - i^2y^2 = 1$$

$$x^2 - (-1)y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Podemos escrever como a equação de uma circunferência

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \;\; .: Centro\, C(a,b) \;\; Raio = r$$

Ficando

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 1^2$$

$$Centro\;\; C(0,0) \;\; e \;\; Raio\;\; r = 1$$

Alternativa D

22. (UECE 2022.2) Dados dois números inteiros positivos p e q, diremos que p é um divisor de q se existe um inteiro positivo k, tal que q = k.p. Um número inteiro positivo q, maior do que um, é chamado de número primo se seus únicos divisores positivos são o número um e o próprio número q. Note que o número 101101 possui n divisores positivos sendo m deles números primos. Assim, é correto concluir que o valor de n – m é igual a

A) 11.

B) 9.

C) 12.

D) 10.

<u>Resolução - Alternativa C – Aritmética – Divisibilidade</u>

Fatorando 101101, temos:

$101101 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 101$

Encontrando n pela regra do expoente:

$$101\,101 = 7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^1 \cdot 101^1$$
$$n = (1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1) = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 16$$

e $m = 4 \quad (7, 11, 13, 101)$

Logo

$n - m = 16 - 4 = 12$

Alternativa C

GABARITO	
13	A
14	A
15	C
16	B
17	B
18	B
19	D
20	C
21	D
22	C